

Calcul du Pavillon Le Cléac'h

Jean Fourcade <audio@volucres.fr>

14 avril 2015

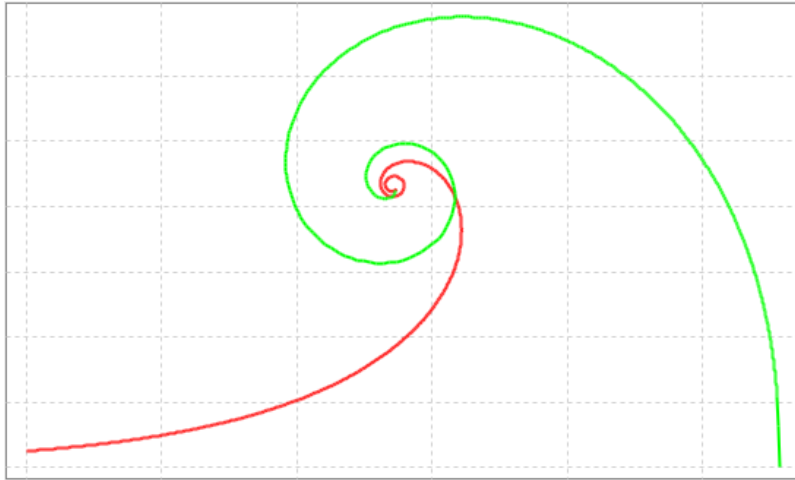


Table des matières

1	Introduction	3
2	Formulation par récurrence	3
3	Formulation exacte	5
3.1	Calcul du profil	6
3.2	Calcul du profil décalé	8
3.3	Calcul des pétales	9
3.4	Calcul du front d'onde	10
4	Programme de calcul du profil	10
5	Comparaison avec la feuille de calcul Excel	13

1 Introduction

Cette note a pour objet l'étude de la méthode de calcul des pavillons acoustiques développée par Jean-Michel Le Cléac'h. Elle se base sur son exposé fait à l'ETF 2010 [1] et sur l'article "Conception des pavillons acoustiques Hypex" [2].

La plupart des pavillons sont calculés en faisant l'hypothèse d'une forme a priori des fronts d'ondes. C'est par exemple le cas des fameux pavillons WE15A dans lesquels les front d'ondes sont supposés plans. Cet également le cas des pavillons tratix de P.G.A.H. Voigt ou les pavillons Kugelwellen dans lesquels les fronts d'ondes sont supposés de forme sphérique [3].

La méthode de calcul de Jean-Michel Le Cléac'h a été développée à la fin des années 70. Elle fait suite à l'observation de la forme du front d'onde révélée par les rares mesures disponibles à cette époque qui montrent que cette forme n'est ni plane ni sphérique. Cette méthode consiste à ne pas faire d'hypothèse sur la forme du front d'onde et à considérer que si la vitesse de propagation du son dans le pavillon est constante alors les fronts d'ondes doivent être parallèles entre eux. Cette hypothèse conduit à définir un maillage particulier du pavillon qui permet de calculer simultanément son profil et la forme du front d'onde.

La première simulation informatique de cette méthode avec un maillage de plusieurs millions d'éléments a été effectué en 1982 et aboutit à la réalisation du premier pavillon Le Cléac'h. En 1999 la méthode de calcul est publiée dans la revue "Musique et technique" [2].

Postérieurement une formulation par récurrence permettant le codage avec un tableur de type Excel rend le calcul accessible à tous (les pavillons Le Cléac'h sont libre de droit).

C'est Marc Henry de la société Musique Concrete [4] qui développa les premiers pavillons commerciaux Le Cléac'h.

On trouve aujourd'hui plusieurs fabriquant de pavillons Le Cléac'h (voir les références [5], [6]).

2 Formulation par récurrence

La formulation par récurrence de la méthode de calcul [1] est la suivante : soit un pavillon axial (voir la figure 1) dont on suppose connu la relation qui exprime la surface du front d'onde en fonction de sa distance à la gorge.

A l'abscisse l_i du front d'onde on définit :

- S_i la surface du front d'onde ;
- ϕ_i l'angle que fait le profil par rapport à l'axe de révolution du pavillon (axe X) ;
- x_i et r_i respectivement l'abscisse et le rayon (ou ordonnée) du profil du pavillon.

On suppose connue les valeurs ci-dessus jusqu'au rang $i - 1$ et on cherche à les déterminer au rang i . On calcule dans un premier temps la surface du front d'onde S_i à partir de la formule d'expansion. On définit ensuite la surface S_i^*

par la relation :

$$S_i^* = (2\sqrt{S_{i-1}} - \sqrt{S_{i-2}})^2 \quad (1)$$

On définit également la surface S_i^i par :

$$S_i^i = S_i - S_i^* \quad (2)$$

S_i^i est la surface infinitésimale d'une couronne sphérique appelée élément périphérique compensateur. Cet élément est de longueur d'arc δ_{i-1} et accroît d'angle du profil de $d\alpha_{i-1}$.

On définit un estimé du rayon par la relation :

$$r_i^* = 3r_{i-1} - 3r_{i-2} + r_{i-3} \quad (3)$$

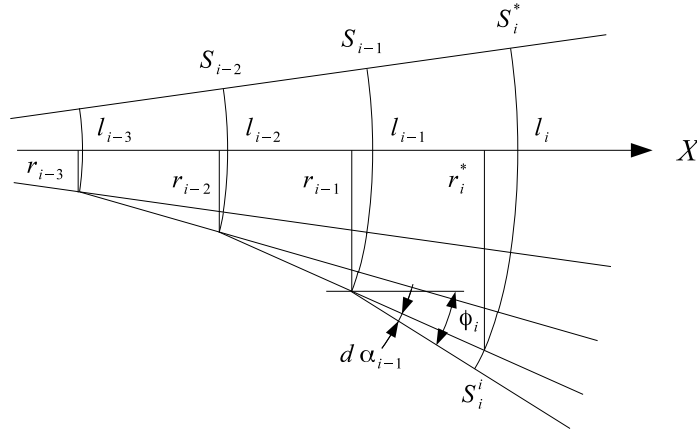


FIGURE 1 – Méthode de calcul par récurrence

On déduit alors la longueur d'arc de l'élément compensateur :

$$\delta_{i-1} = \frac{S_i^i}{2\pi r_i^*} \quad (4)$$

En posant $dl = l_i - l_{i-1}$ l'accroissement d'angle du profil se calcule par l'expression :

$$d\alpha_{i-1} = \frac{\delta_{i-1}}{dl} \quad (5)$$

L'angle du profil par rapport à l'axe du pavillon est alors :

$$\phi_i = \phi_{i-1} + d\alpha_{i-1} \quad (6)$$

Les coordonnées du profil s'expriment finalement par :

$$x_i = x_{i-1} + dl \cos \phi_i \quad (7)$$

$$y_i = y_{i-1} + dl \sin \phi_i \quad (8)$$

Ces relations codées dans une feuille de calcul Excel permettent de calculer le profil d'un pavillon. On pourra télécharger le fichier Excel de Jean-Michel Le

Cléac'h <Pavillon JMLC.xls> (version de 2007) qui utilise la loi d'expansion hyperbolique.

Mise à part les relations (1) et (3) les formules de calcul sont aisément compréhensibles.

La relation (3) est l'expression d'une régression linéaire considérant que les extrémités des rayons r_i^* , r_{i-1} , r_{i-2} et r_{i-2} sont alignés. En toute rigueur, seuls les extrémités de r_i^* , r_{i-1} et r_{i-2} sont sur une même droite. Cela conduit à la relation :

$$r_i^* = 2r_{i-1} - r_{i-2} \quad (9)$$

L'utilisation de cette relation en lieu et place de (3) ne révèle pas de différence notable dans la courbe du profil.

Pour comprendre l'origine de la relation (1) il faut se pencher sur l'article [2] et les hypothèses qui y sont exposées sur la forme du front d'onde.

3 Formulation exacte

Comme nous l'avons déjà précisé dans l'introduction, la méthode originale développée par Jean-Michel Le Cléac'h consiste à **ne pas choisir de forme a priori du front d'onde mais à déterminer cette forme par le calcul**.

Les hypothèses prises en compte pour construire les fronts d'ondes [2] sont les suivantes :

- le front d'onde de la gorge est supposé sphérique ;
- les fronts d'ondes sont parallèles entres eux ;
- les parois du pavillon sont perpendiculaires aux fronts d'ondes ;
- les surfaces du front d'onde suivent une loi donnée.

La figure 2 donne le maillage du pavillon qui découle directement des hypothèses ci-dessus. Détaillons la construction de ce maillage en s'appuyant sur cette figure.

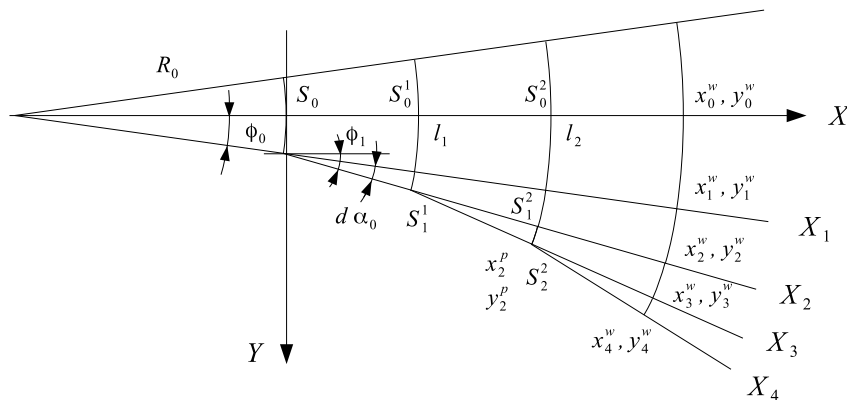


FIGURE 2 – Maillage du pavillon

A l'abscisse $l_0 = 0$ de la gorge le front d'onde est modélisé par une calotte sphérique de surface S_0 , de rayon R_0 et de demi-angle d'ouverture ϕ_0 . Cet angle est déterminé par le moteur qui excite le pavillon.

A l'abscisse l_1 la surface du front d'onde vaut S_1 dont la valeur est calculé à partir de la loi d'expansion du pavillon. On décompose cette surface en la somme de deux surface S_0^1 et S_1^1 . Les fronts d'ondes devant être parallèles entre eux, la surface S_0^1 est nécessairement une calotte sphérique de rayon $R_0 + l_1$ et de demi-angle d'ouverture ϕ_0 . Pour couvrir l'augmentation de surface du front d'onde, la courbure du profil augmente de la valeur $d\alpha_0$. Cette augmentation définit l'élément périphérique compensateur de surface S_1^1 .

La paroi du pavillon devant être perpendiculaire au front d'onde, l'élément périphérique compensateur est nécessairement une couronne sphérique définie par l'angle $d\alpha_0$ (voir la figure 2 et figure 4).

A l'abscisse l_2 , la surface du front d'onde est cette fois décomposée en la somme de trois surfaces suivant le même principe. De proche en proche et toujours suivant la même méthode on construit le maillage de la figure 2 dans lequel la surface du front d'onde à l'abscisse l_i est décomposée en la somme de i surfaces élémentaires.

3.1 Calcul du profil

Calculons à présent les expression analytiques des surfaces élémentaires afin de déterminer le profil. Notons X l'axe de révolution du pavillon et l_i les abscisses des fronts d'ondes comptées suivant cet axe. On suppose les abscisses l_i equiréparties et on pose :

$$dl = l_i - l_{i-1} \quad (10)$$

Les fronts d'ondes étant parallèles entre-eux, les abscisses l_i sont également portés sur tous les axes X_i (voir la figure 2). Notons D le diamètre de la gorge et h la hauteur de la calotte sphérique du front d'onde de la gorge (voir la figure ci-dessous).

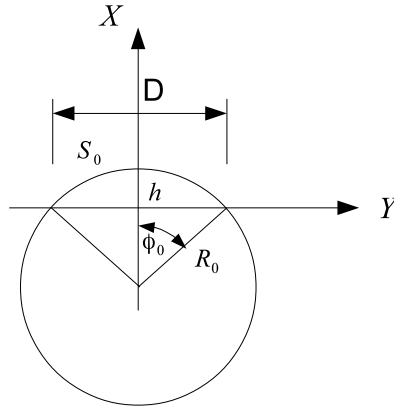


FIGURE 3 – Calotte sphérique

On déduit la valeur du rayon de la calotte sphérique :

$$R_0 = \frac{D}{2 \sin \phi_0} \quad (11)$$

D'autre part nous avons :

$$h = R_0(1 - \cos \phi_0) \quad (12)$$

La surface du front d'onde de la gorge s'écrit donc :

$$S_0 = 2\pi R_0^2(1 - \cos \phi_0) \quad (13)$$

A chaque abscisse d'indice i situé à la distance l_i de la gorge, la surface du pavillon S_i est constituée de la somme d'une calotte sphérique S_0 et de i couronnes sphériques de surface S_k^i avec $k = 1$ à i . On peut donc écrire :

$$S_i = \sum_{k=0}^i S_k^i \quad (14)$$

Calculons la valeur de chaque surface S_0^i . A partir de l'expression de S_0 on obtient :

$$S_0^i = 2\pi(R_0 + l_i)^2(1 - \cos \phi_0) \quad (15)$$

Calculons à présent les expressions des surfaces S_k^i pour $k \neq 0$. Considérons le schéma de la figure 4 qui représente la surface élémentaire dS d'une couronne sphérique d'angles compris entre ϕ et $\phi + d\alpha$, de rayon r , de hauteur h et de longueur d'arc δ .

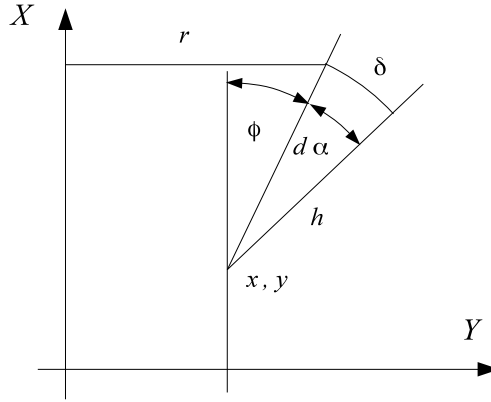


FIGURE 4 – Couronne shérique

Nous avons :

$$d\alpha = \frac{\delta}{h} \quad (16)$$

$$\delta = \frac{dS}{2\pi r} \quad (17)$$

avec :

$$r = h \sin \phi + y \quad (18)$$

On obtient finalement :

$$dS = 2\pi h(h \sin \phi + y)d\alpha \quad (19)$$

En appliquant cette équation au calcul de S_k^i et en remarquant que par construction du maillage le parallélisme des front d'onde conduit à ce que la hauteur de cet élément soit tel que $h = l_i - l_{k-1}$, on déduit pour $k = 1$ à i :

$$S_k^i = 2\pi(l_i - l_{k-1})[(l_i - l_{k-1}) \sin \phi_{k-1} + y_{k-1}^p]d\alpha_{k-1} \quad (20)$$

De l'expression :

$$S_i = \sum_{k=0}^i S_k^i \quad (21)$$

on déduit la surface de l'élément compensateur :

$$S_i^i = S_i - \sum_{k=0}^{i-1} S_k^i \quad (22)$$

Le rayon de l'élément périphérique compensateur est :

$$r_i = dl \sin \phi_{i-1} + y_{i-1}^p \quad (23)$$

On déduit de la relation (20) :

$$d\alpha_{i-1} = \frac{S_i^i}{2\pi r_i dl} \quad (24)$$

L'angle du profil à l'abscisse i est alors :

$$\phi_i = \phi_{i-1} + d\alpha_{i-1} \quad (25)$$

Il nous reste enfin à calculer les coordonnées du profil. On obtient :

$$x_i^p = x_{i-1}^p + dl \cos \phi_i \quad (26)$$

$$y_i^p = y_{i-1}^p + dl \sin \phi_i \quad (27)$$

3.2 Calcul du profil décalé

Le processus de construction, pour prendre en compte l'épaisseur des parois du pavillon ou pour tracer un gabarit avec un outil de découpe, nécessite de tracer un profil décalé d'une distance donnée par rapport au profil du pavillon.

Notons d la distance de décalage. Le schéma de la figure 5 permet de calculer les coordonnées du profil décalé pour $i \geq 0$:

On obtient :

$$x_i^d = x_i^p + dl \cos(\phi_i + \frac{\pi}{2}) \quad (28)$$

$$y_i^d = y_i^p + dl \sin(\phi_i + \frac{\pi}{2}) \quad (29)$$

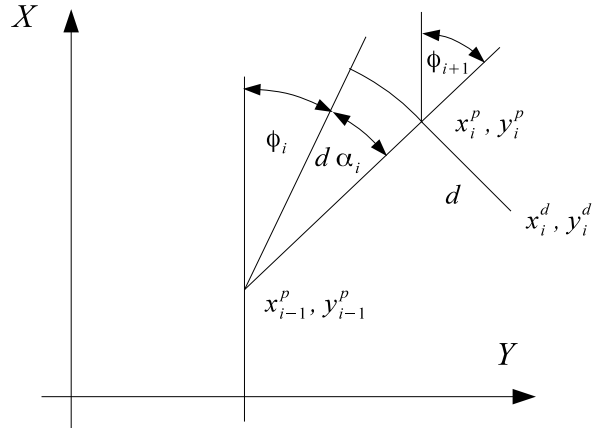


FIGURE 5 – Décalage du profil

3.3 Calcul des pétales

Une technique possible pour construire un pavillon rond est d’approcher le profil par un polygone régulier. C’est la technique utilisée pour la construction des pavillons des anciens gramophones. Le schéma de la figure 6 représente ce polygone dans lequel s’inscrit la section ronde du pavillon.

L’angle ψ de la figure se calcule en fonction du nombre N de pétale :

$$\psi = \frac{2\pi}{N} \quad (30)$$

L’abscisse curviligne du profil est par construction la distance l_i . La demi largeur de la pétale se déduit de la cote y_p du profil par l’équation :

$$q = y_p \tan\left(\frac{\pi}{N}\right) \quad (31)$$

Pour calculer les coordonnées des pétales associées au profil décalé, on remplace dans l’expression ci-dessus la valeur du profil y_p par le profil décalé y_d .

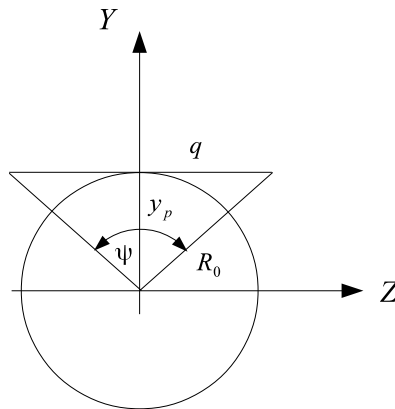


FIGURE 6 – Pétales

Calculons à présent le rapport de surface entre celle du polygone et le disque inscrit. La surface du polygone est :

$$S_p = Nq^2 \quad (32)$$

soit :

$$S_p = Ny^{2p} \tan\left(\frac{\pi}{N}\right) \quad (33)$$

La surface de la section ronde du pavillon vaut quand à elle :

$$S_r = \pi y^{2p} \quad (34)$$

Le rapport de ces deux surfaces prend donc la valeur :

$$K = \frac{N}{\pi} \tan\left(\frac{\pi}{N}\right) \quad (35)$$

Ce rapport est constant ce qui nous permet de déduire que le pavillon à pétales suit bien la loi d'expansion du pavillon rond au rapport K près.

3.4 Calcul du front d'onde

Soit à calculer les coordonnées x_k^w et y_k^w du front d'onde à une abscisse donnée l_j . De la figure 2 on déduit que le front d'onde à l'abscisse i est constitué de $i + 1$ segments formés de $i + 2$ points. Le premier point est situé sur l'axe X du pavillon. Ses coordonnées sont :

$$x_0^w = l_i \quad (36)$$

$$y_0^w = 0 \quad (37)$$

Le dernier point appartient au profil :

$$x_{i+1}^w = x_i^p \quad (38)$$

$$y_{i+1}^w = y_i^p \quad (39)$$

Les points intermédiaires ($k > 0$ et $k \leq i$) se calculent à partir des coordonnées x_{k-1}^p, y_{k-1}^p et l'angle ϕ_{k-1} . On obtient :

$$x_k^w = x_{k-1}^p + (l_i - l_{k-1}) \cos \phi_{k-1} \quad (40)$$

$$y_k^w = y_{k-1}^p + (l_i - l_{k-1}) \sin \phi_{k-1} \quad (41)$$

4 Programme de calcul du profil

Le programme AxialHorn.jar calcule le profil d'un pavillon axial Le Cléac'h à partir des équations précédemment définies. Ce programme est écrit en Java, son interface graphique en Swing et les tracés de courbes font appels à la bibliothèque Xchart de Xeiam.

Le programme et ses sources se trouvent dans le répertoire $\langle AxialHorn.zip \rangle$. Il n'y a pas lieu de procéder à une installation du programme. L'exécutable

AxialHorn.jar se trouve dans le répertoire *dist* qui peut être sauvegardé dans un dossier quelconque. Un simple double clic sur icône *AxialHorn.jar* suffit pour activer le programme.

La loi d'expansion utilisée pour calculer la surface du front d'onde est la loi hyperbolique qui s'écrit :

$$S(l) = S_0[\cosh m \frac{l}{2} + T \sinh m \frac{l}{2}]^2 \quad (42)$$

dans laquelle S est la surface du front d'onde à la distance l de la gorge, S_0 la surface de la gorge, m le coefficient d'expansion et T le facteur de forme.

Le coefficient d'expansion détermine la fréquence de coupure acoustique basse du pavillon f_c par l'équation ci-dessous dans laquelle c la vitesse du son dans l'air (344 m/s) :

$$m = \frac{4\pi f_c}{c} \quad (43)$$

Le facteur de forme T définit le type de pavillon :

- pavillon caténoïdal pour $T = 0$;
- pavillon hypex pour $T = 0.707$;
- pavillon exponentiel pour $T = 1$.

La page qui apparaît à l'écran lors de l'activation du programme est celle de la figure 7. Voici la description des différents paramètres à saisir :

- Nom : il s'agit du nom du fichier contenant les résultats des calculs ;
- Fréquence de coupure (hz) ;
- Facteur de forme : il définit le type du pavillon (voir ci-dessus) ;
- Diamètre de gorge (mm) ;
- Angle de la compression (degrés) : angle du cône que forme la sortie de la chambre de compression (voir figure 2) ;
- Nombre de pétales : nombre de faces constituant le polygone qui inscrit la section ronde du pavillon (construction de type gramophone) ;
- Pas de calcul (mm) : pas de discrétisation du maillage du pavillon (la valeur de 1 mm convient la plupart du temps mais on pourra être amené à diminuer cette valeur pour des fréquences de coupure élevées, supérieure à 1 khz , et à l'augmenter pour limiter le temps d'exécution du programme pour les faibles fréquences, inférieure à 100 hz) ;
- Pas de sortie (mm) : c'est le pas des données du fichier de sortie compté le long de l'axe X (abscisse curviligne) ;
- Angle d'arrêt du calcul (degrés) : le calcul prend fin quand l'angle que fait le profil avec l'axe X du pavillon est supérieure ou égal à l'angle d'arrêt ;
- Abscisse du front d'onde (mm) : abscisse à laquelle le programme dessine le front d'onde et calcule sa surface (pour ne pas tracer le front d'onde saisir une valeur nulle et pour tracer le front d'onde de la bouche, dont l'abscisse est inconnue, saisir une valeur supérieure à cette abscisse) ;
- Décalage du profil (mm) : permet de générer un profil décalé d'une distance donnée (pour ne pas calculer les coordonnées du profil décalé saisir une valeur nulle) ;

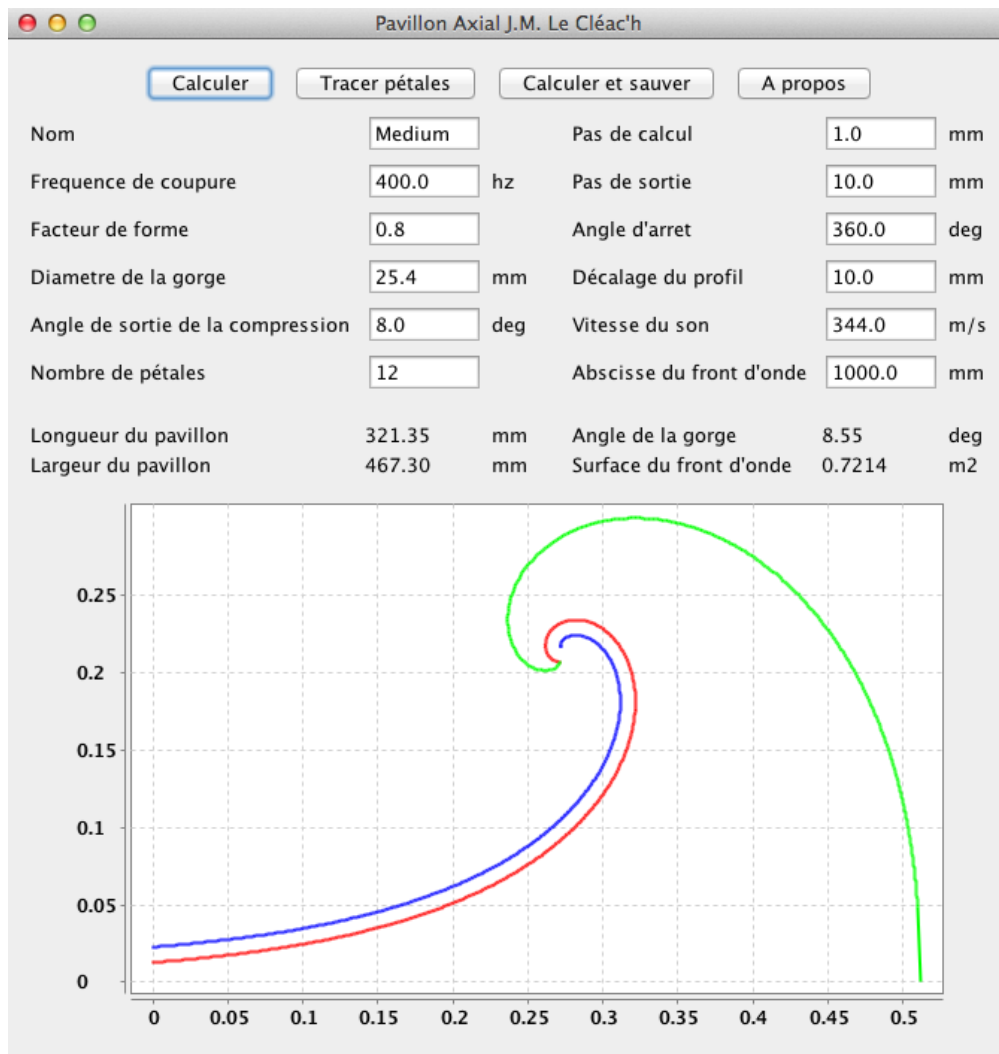


FIGURE 7 – Logiciel AxialHorn

- Vitesse du son dans l'air (m/s) prise en compte dans les calculs.

Une fois les données saisies, un clic sur le bouton "Calculer" lance le calcul du profil. Les résultats qui s'affichent à l'écran sont alors les suivants :

- Longueur du pavillon (mm) : longueur hors tout du pavillon ;
- Largeur du pavillon (mm) : largeur hors tout ;
- Surface du front d'onde (m²) : surface du front d'onde à l'abscisse saisie par l'utilisateur ;
- Angle du cône tangent au profil au niveau de la gorge (degrés).

On pourra comparer la valeur de cet angle à celle du cône de sortie de la compression. Pour qu'il y ait continuité de la pente, il faut en théorie que ces angles soient identiques. L'exploitation du programme de calcul montre que le profil est peu sensible au rayon du front d'onde de la gorge.

La partie inférieure de la fenêtre du programme contient un graphique qui

permet de tracer :

- Le profil du pavillon (courbe en rouge) ;
- Le profil décalé (courbe en bleu) ;
- Le front d'onde (courbe en vert).

Le bouton "Calculer et Sauver" lance les calculs et sauvegarde les résultats dans le fichier texte dont le nom est celui du pavillon. Ce fichier comprend les données d'entrées, les résultats affichés à l'écran, les coordonnées du profil et des pétales.

Les pavillons Le Cléac'h se caractérisent par un repliement du profil ce qui conduit à augmenter très largement la surface de leur bouche quand on ne les limite pas à un angle de sortie de 90 degrés.

Voici à titre d'exemple pour le pavillon dont les paramètres sont ceux de la figure 7, la surface de bouche et la longueur effective du pavillon (abscisse du front d'onde de la bouche) en fonction de l'angle d'arrêt du profil :

Arrêt degrés	L_0 mm	S m^2
90	394	0.13
180	467	0.38
270	496	0.57
360	511	0.72

On constate que sans augmenter la longueur physique du pavillon la surface de la bouche passe de 0.13 m^2 à 0.72 m^2 (soit près de 6 fois plus) en prolongeant l'angle d'arrêt de 90 degrés à 360 degrés. On aura donc intérêt à utiliser cette dernière valeur pour avoir un comportement en pavillon quasi infini et limiter ainsi les réflexions d'ondes qui prennent naissance à la bouche.

5 Comparaison avec la feuille de calcul Excel

Pour générer le profil avec un tableur de type Excel, il faut une formulation par récurrence du calcul du profil. Les équations du chapitre 2 ne permettent pas une telle formulation car le front d'onde est une somme de surfaces dont il faut recalculer les valeurs à chaque abscisse.

Pour obtenir une formulation par récurrence et retrouver l'origine de l'équation (1) utilisée par Jean- Michel Le Cléac'h dans sa feuille de calcul, nous allons supposer que les fronts d'ondes peuvent être modélisés par une calotte sphérique unique.

Plus précisément nous allons considérer que les surface S_{i-1} et S_{i-2} (voir figure 1) peuvent être approximées par des calottes sphérique de même angle d'ouverture ϕ_{i-1}^* et respectivement de hauteur H et $H - dl$ avec ϕ_{i-1}^* et H inconnus.

En supposant que la surface S_i^* est également une calotte sphérique nous déduisons que son demi-angle d'ouverture est ϕ_{i-1}^* et sa hauteur $H + dl$.

On peut alors écrire à partir de l'équation (13) :

$$S_i^* = 2\pi(H + dl)^2(1 - \cos \phi_{i-1}^*) \quad (44)$$

$$S_{i-1} = 2\pi H^2(1 - \cos \phi_{i-1}^*) \quad (45)$$

$$S_{i-2} = 2\pi(H - dl)^2(1 - \cos \phi_{i-1}^*) \quad (46)$$

En éliminant H et ϕ_{i-1}^* on trouve l'équation (1) :

$$S_i^* = (2\sqrt{S_{i-1}} - \sqrt{S_{i-2}})^2 \quad (47)$$

Pour que cette approximation soit valable, il faut que l'angle ϕ_{i-1}^* déterminé par les équations ci-dessus soit proche de l'angle d'ouverture du profil.

Considérons un pavillon exponentiel ($T = 1$). La formule d'expansion est alors :

$$S_i = e^{ml_i} \quad (48)$$

En divisant l'équation (45) par l'équation (46) et en se limitant au développement limité à l'ordre 1 en dl , on en déduit :

$$H = \frac{2}{m} \quad (49)$$

A partir de l'équation (45) on déduit alors :

$$\phi_{i-1}^* = \arccos\left(1 - \frac{m^2 S_{i-1}}{8\pi}\right) \quad (50)$$

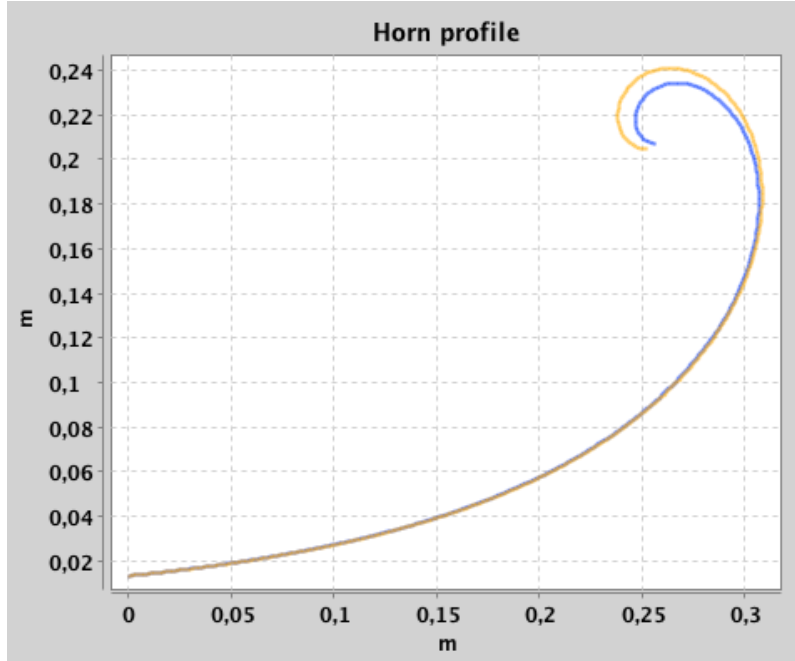


FIGURE 8 – Ecart de calcul du profil

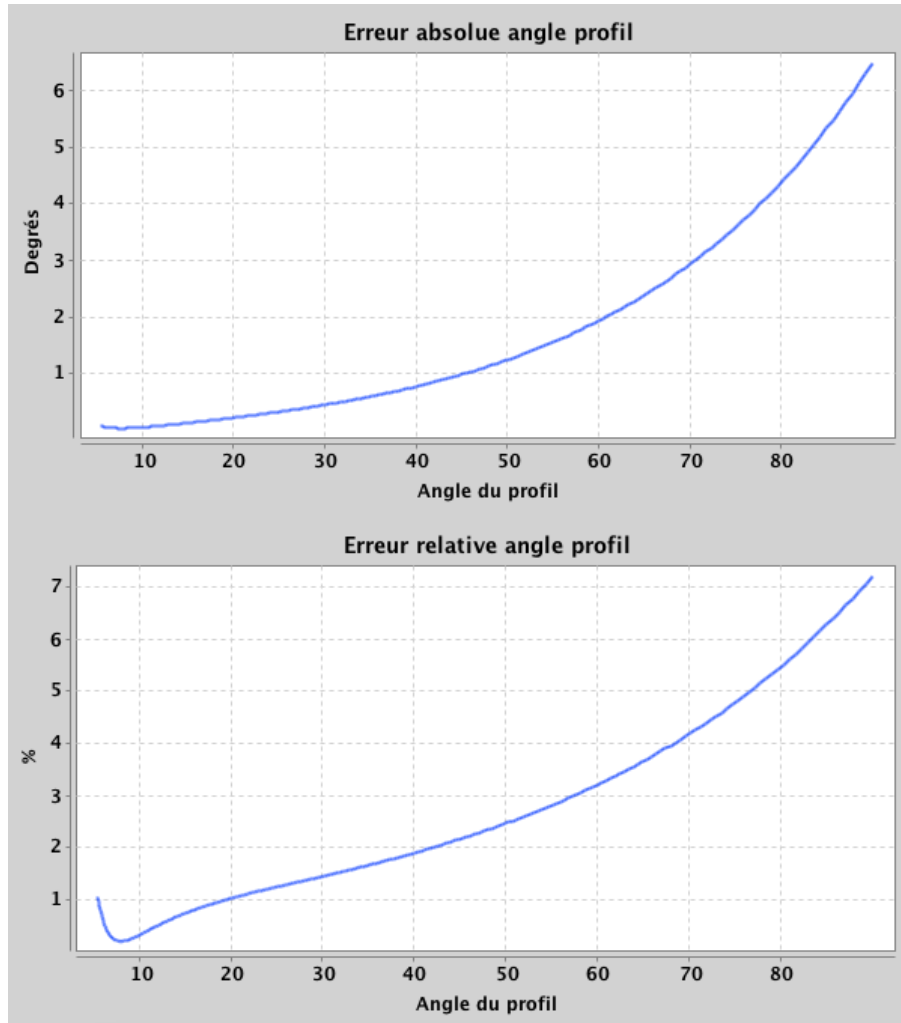


FIGURE 9 – Ecart d'angle d'ouverture

Les courbes de la figure 9 tracent l'écart absolu et relatif de $\phi_{i-1} - \phi_{i-1}^*$ en fonction de ϕ_{i-1} avec ϕ_{i-1} calculé à partir de l'équation (25) et ϕ_{i-1}^* calculé à partir de l'équation (50).

Les paramètres de calcul sont les suivants : fréquence de coupure 400 hz, diamètre de gorge 25.4 mm, facteur de forme 1, angle de sortie de la compression 8 degrés.

On remarque que l'erreur absolue est inférieure à 1 degré jusqu'à 50 degrés d'ouverture et que l'erreur relative reste inférieure à 7% jusqu'à 90 degrés d'ouverture.

Le graphique de la figure 8 représente la différence de profil entre le programme AxialHorn et la formulation Excel.

La courbe de couleur orange est la formulation récursive (programme Excel), la courbe de couleur bleu est celle obtenue avec le calcul exact de la surface des fronts d'ondes (programme AxialHorn). La différence ne devient sensible qu'à la bouche et reste négligeable.

Celle-ci, en fonction de la courbure du profil, vaut :

Angle degrés	Ecart %
90	0.5
180	2.6
270	2.7

Références

- [1] Jean-Michel Le Cléac'h, Acoustical horns and waveguides. ETF 2010, Stella Plage, November 27.
- [2] Jean-Michel Le Cléac'h, Conception des pavillons acoustiques Hyper. Musique et technique, 2e trimestre 1999.
- [3] Bjorn Kelbrek, Horn Theory : An introduction, Part 1 and 2. AudioXPress, 2008.
- [4] La Grande Castine : <http://www.lagrandecastine.fr>
- [5] Azurahorn : <http://www.azurahorn.com>
- [6] Autotech : http://www.autotech.pl/pdf/audio_en.pdf